第19講・２次方程式の利用

例題 1　整数に関する問題

問題

ある正の整数を 2 乗した結果は，もとの数の 5 倍より 6 大きくなる。もとの数を求めなさい。

ポイント

● 2 次方程式の文章題の解き方
- [1]　求めたい数を x とおき，方程式を立てる
- [2]　[1]の 2 次方程式を解く
- [3]　[2]の解が問題に適しているか確かめる

解答

もとの数を x とおくと，この数を 2 乗した結果は，もとの数の 5 倍より 6 大きくなるので

$$x^2 = 5x + 6$$
$$x^2 - 5x - 6 = 0$$
$$(x + 1)(x - 6) = 0$$
$$x = -1,\ 6$$

x は正の整数なので，$x = -1$ は問題に適していない。
よって

6　…(答)

MEMO

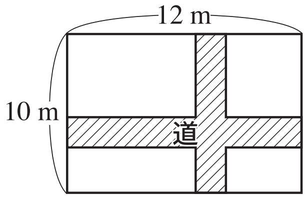
確認テスト 1

ある正の整数を 2 乗した結果は，もとの数の 5 倍より 6 大きくなる。もとの数を求めなさい。

例題 2 面積に関する問題

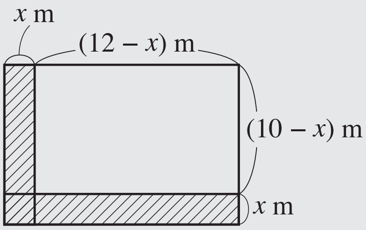
問題

縦が 10 m，横が 12 m の長方形の土地がある。この土地に，右の図のように縦，横，同じ幅の道をつくったところ，道を除いた土地の面積が，もとの土地の面積の $\frac{2}{3}$ になった。このとき，道幅を求めなさい。



ポイント

- 右の図のように道を移動させても，道を除いた土地の面積は変わらない。
- 道幅を x m とすると，道を除いた土地の面積は
  $(12-x)\times(10-x)$ (m^2)



解答

道幅を x m とおくと，道を除いた土地の面積は，もとの土地の面積の $\frac{2}{3}$ に等しいので

$$
\begin{aligned}
(12-x)(10-x) &= \frac{2}{3}\times 10\times 12 \\
(x-12)(x-10) &= 80 \\
x^2-22x+120 &= 80 \\
x^2-22x+40 &= 0 \\
(x-2)(x-20) &= 0 \\
x &= 2,\ 20
\end{aligned}
$$

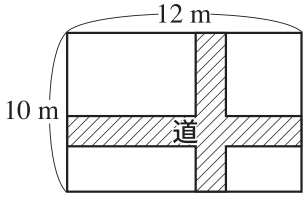
x は道幅なので，$x < 10$ である。したがって，$x = 20$ は問題に適していない。したがって，求める道幅は

2 m　…(答)

MEMO

確認テスト 2

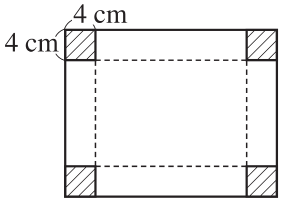
縦が 10 m，横が 12 m の長方形の土地がある。この土地に，右の図のように縦，横，同じ幅の道をつくったところ，道を除いた土地の面積が，もとの土地の面積の $\frac{2}{3}$ になった。このとき，道幅を求めなさい。



例題 3 体積に関する問題

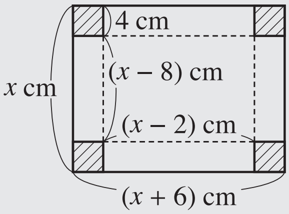
問題

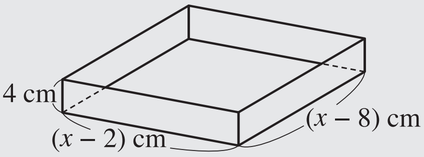
横が縦より 6 cm 長い長方形の厚紙がある。この 4 すみから 1 辺が 4 cm の正方形を切り取り，直方体の容器をつくると，その容積は 2464 cm^3 になる。はじめの厚紙の縦と横の長さを求めなさい。



ポイント

右の図のように，厚紙の縦の長さを x cm とすると，横の長さは $(x+6)$ cm となる。この厚紙を組み立てると，右下の図のような直方体の容器ができる。





解答

厚紙の縦の長さを x cm とすると，横の長さは $(x+6)$ cm である。この厚紙を組み立ててできる直方体の容器について

底面の縦の長さ $(x-8)$ cm,
底面の横の長さ $(x-2)$ cm,
高さ 4 cm

であるから，容積について

$$(x-8)(x-2)\times 4 = 2464$$
$$(x-8)(x-2) = 616$$
$$x^2-10x+16 = 616$$
$$x^2-10x-600 = 0$$
$$(x-30)(x+20) = 0$$
$$x = -20,\ 30$$

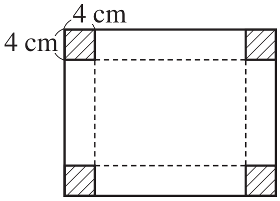
x は厚紙の縦の長さなので，$x = -20$ は問題に適していない。したがって，厚紙の縦と横の長さは

縦 30 cm, 横 36 cm　…(答)

MEMO

確認テスト 3

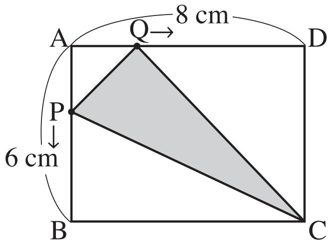
横が縦より 6 cm 長い長方形の厚紙がある。この 4 すみから 1 辺が 4 cm の正方形を切り取り，直方体の容器をつくると，その容積は 2464 cm^3 になる。はじめの厚紙の縦と横の長さを求めなさい。



例題 4　動点に関する問題

問題

右の図のような AB ＝ 6 cm，AD ＝ 8 cm の長方形 ABCD がある。2 点 P，Q は頂点 A を同時に出発し，点 P は辺 AB 上を頂点 B まで，点 Q は辺 AD 上を頂点 D までともに毎秒 1 cm の速さで動く。ただし，点 Q は点 P が頂点 B に着くと停止する。△PCQ の面積が 12 cm^2 になるのは，2 点 P，Q が頂点 A を出発してから何秒後であるか答えなさい。

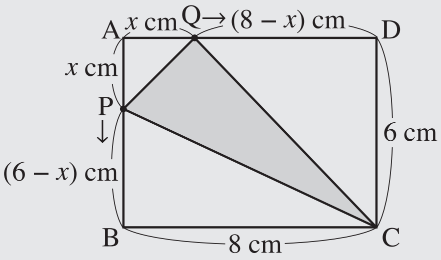


ポイント

● 2 点 P，Q は毎秒 1 cm の速さで移動するので，x 秒後の AP，AQ の長さは

$AP = AQ = x$ cm

となる。よって，各辺の長さは右の図のようになるので，△PCQ の面積を x を用いて表すことができる。



解答

x 秒後の △PCQ の面積は

$\triangle PCQ$
$= (\text{長方形 ABCD}) - \triangle APQ - \triangle BCP - \triangle DQC$

と計算できる。それぞれの図形の面積は

$(\text{長方形 ABCD}) = 6 \times 8$
$= 48\ (cm^2)$

$\triangle APQ = \dfrac{1}{2} \times x \times x$
$= \dfrac{1}{2} x^2\ (cm^2)$

$\triangle BCP = \dfrac{1}{2} \times 8 \times (6 - x)$
$= 4(6 - x)$
$= 24 - 4x\ (cm^2)$

MEMO

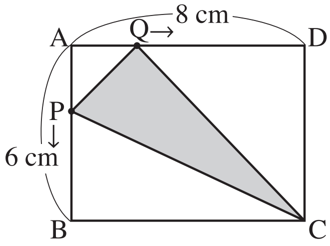
$$\triangle DQC = \frac{1}{2} \times (8 - x) \times 6$$
$$= 3(8 - x)$$
$$= 24 - 3x \ (\text{cm}^2)$$

よって

$$12 = 48 - \frac{1}{2}x^2 - (24 - 4x) - (24 - 3x)$$
$$12 = 48 - \frac{1}{2}x^2 - 24 + 4x - 24 + 3x$$
$$\frac{1}{2}x^2 - 7x + 12 = 0$$
$$x^2 - 14x + 24 = 0$$
$$(x - 2)(x - 12) = 0$$
$$x = 2,\ 12$$

AB = 6 cm だから，$x = 12$ は問題に適していない。
よって

2 秒後　…(答)

確認テスト 4

　右の図のような AB ＝ 6 cm，AD ＝ 8 cm の長方形 ABCD がある。2 点 P，Q は頂点 A を同時に出発し，点 P は辺 AB 上を頂点 B まで，点 Q は辺 AD 上を頂点 D までともに毎秒 1 cm の速さで動く。ただし，点 Q は点 P が頂点 B に着くと停止する。△PCQ の面積が 12 cm² になるのは，2 点 P，Q が頂点 A を出発してから何秒後であるか答えなさい。